# Interprétation de la théorie du G.E.C. (part. 3)

L'équation du mouvement, considérant que les deux masselottes de masse m chacune sont solidaires d'une masse mobile M par l'intermédiaire des cordons est :

(1) $$2m\gamma_r = -M\frac{d^2r}{dt^2}$$

Où $\gamma_r$ est l'accélération radiale, laquelle est donnée par la formule (voir 1$^{er}$ document) :

(2) $$\gamma_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

<u>Attention :</u> on ne soulève pas M, on la déplace horizontalement sur un support sans frottement. En régime « système isolé », on définit $\alpha$ tel que

(3) $$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{M}{2m}}}$$

Alors l'équation du mouvement s'écrit :

(4a) $$\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$$

couplée à

(4b) $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{R1^2}{r^2}\omega_0$$

Ce système admet comme solution :

(5a) $$r = \frac{R1}{\cos\alpha\theta}$$

Et

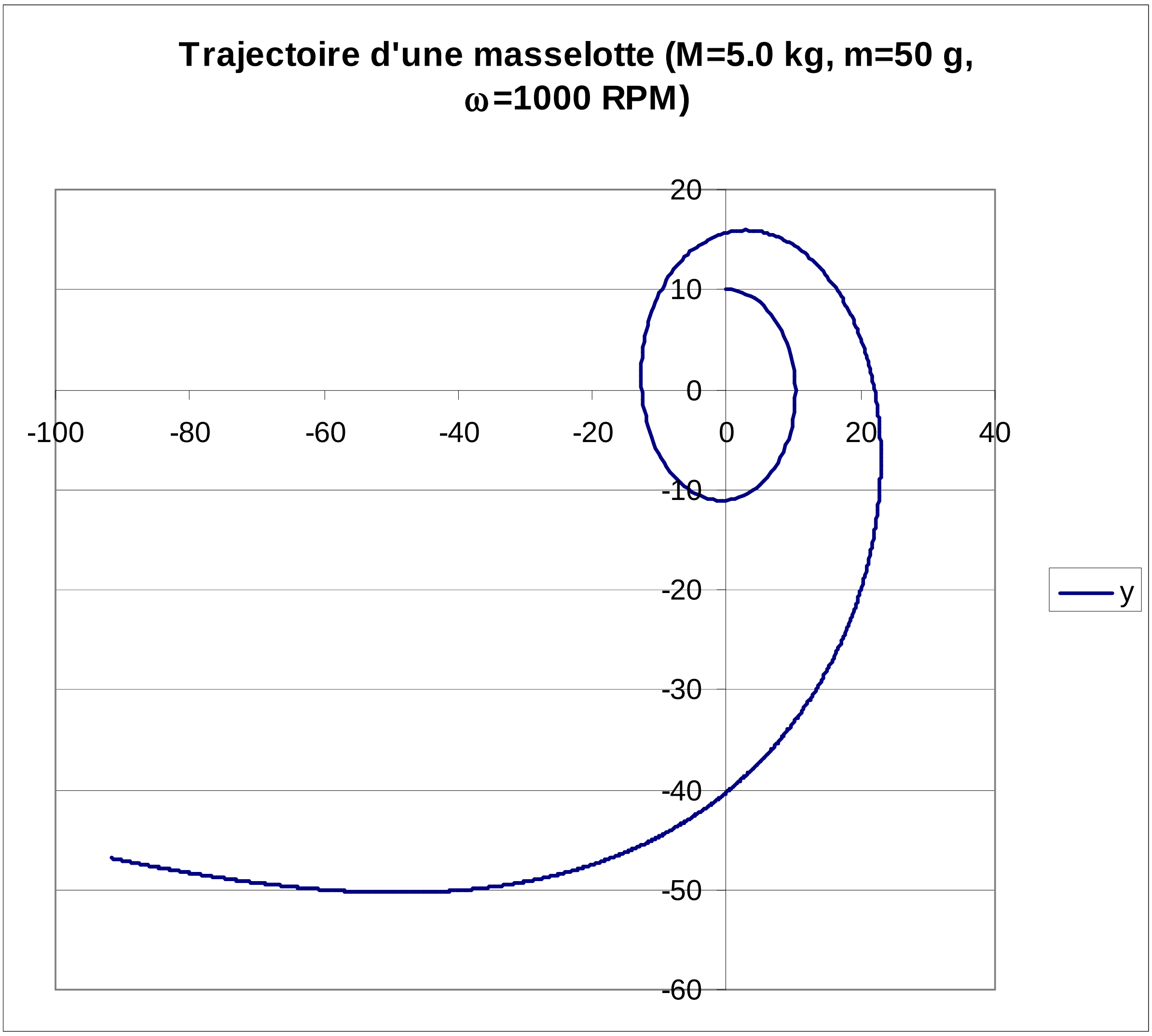
(5b) $$\theta = \frac{1}{\alpha}Arctg(\alpha\omega_0 t)$$

Si on passe aux limites, on voit que, pour une masse M nulle cette solution est compatible avec ce qui a été trouvé dans le 2$^{e}$ rapport (M=0 donne $\alpha$=1 d'où mouvement rectiligne uniforme des masselottes). Pour une masse M infinie, cela correspondrait à « attacher » le cordon à un point fixe, et le passage à la limite ($\alpha$ tend vers 0) donne :

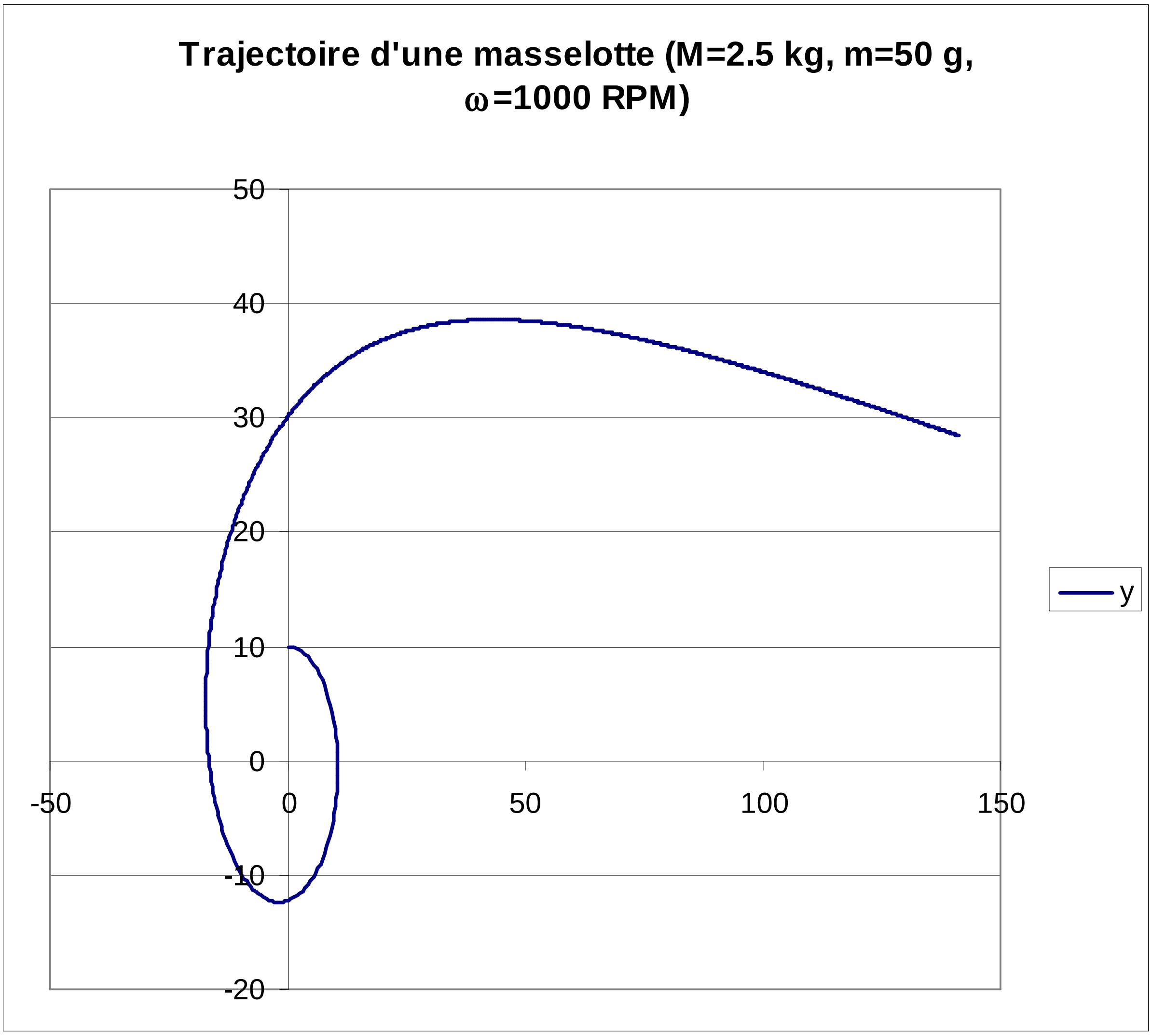
(6) $r = R1$ et $\theta = \omega_0 t$

ce qui signifie que les masselottes tourneraient indéfiniment autour de l'axe sur un cercle de rayon R1. Entre ces deux solutions extrêmes, on trouve les solutions intermédiaires.

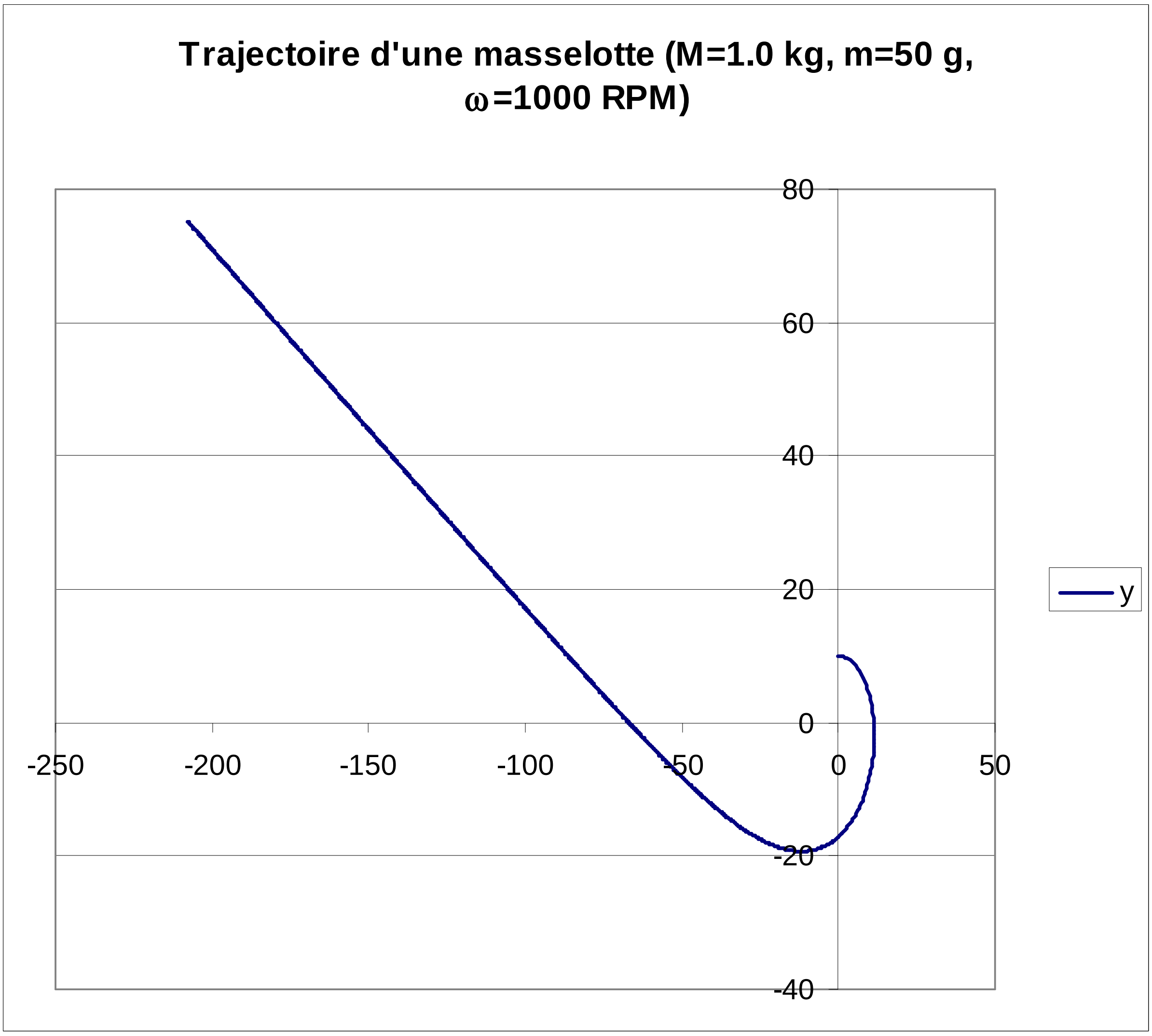
Par exemple, avec deux masselottes de 50g tirant une masse M, on obtient des trajectoires d'une masselotte suivante (durant 0.7s):




Celle-ci décrit une spirale dans le cas le plus général.



Trajectoire d'une masselotte (M=2.5 kg, m=50 g, ω=1000 RPM)
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-50
0
50
100
150
y




La masse M ne doit pas être soulevée (car on ne tient pas compte de son poids) : elle doit être seulement « traînée » le long d'un support horizontal sans frottement. On peut aussi remplacer cette masse par une inertie : dans ce cas, les cordons sont reliés à la périphérie d'un cylindre de rayon R3, et on peut montrer que la masse équivalente M est fournie par la relation :

(7) $M = I / R3^2$

La question est : que se passe-t-il si I est précisément égal à l'inertie des deux masselottes à l'instant t ? On devrait reboucler sur le cas du G.E.C., mais l'équation qui en découle pourrait-être la suivante :

(8) $$\left(\frac{R3^2}{r^2} + \beta\right)\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{R1^4}{r^3}\omega_0^2 = 0$$

Où $\beta$ est une constante au moins plus grande que 1 fonction de l'inertie du reste du système (autre que les masselottes). Cette équation est probablement celle du G.E.C. mais elle ne peut pas être résolue de manière analytique.